MATEMATIKA 2

Gordan Radobolja

PMF

3. ožujka 2014.

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...)

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...)
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...)
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).
- Pretpostavka: intuitivno jasan pojam trodimenzionalnog (Euklidskog) prostora E^3.

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...)
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).
- Pretpostavka: intuitivno jasan pojam trodimenzionalnog (Euklidskog) prostora E^3.
- Oznake:

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...)
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).
- Pretpostavka: intuitivno jasan pojam trodimenzionalnog (Euklidskog) prostora E^3.
- Oznake:
  - točke: $A, B, M, N, P, T, \ldots$

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...)
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).
- Pretpostavka: intuitivno jasan pojam trodimenzionalnog (Euklidskog) prostora E^3.
- Oznake:
  - točke: $A, B, M, N, P, T, \dots$
  - dužine: $\overline{AB}, \overline{MN}$, ...

VEKTORI

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...)
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).
- Pretpostavka: intuitivno jasan pojam trodimenzionalnog (Euklidskog) prostora E^3.
- Oznake:
  - točke: $A, B, M, N, P, T, \ldots$
  - dužine: $\overline{AB}, \overline{MN}$, ...
  - udaljenosti - duljine dužina: $d(A, B)$ ili $|AB|$, ...

Usmjerene dužine

Definicija

- <u>**Usmjerena dužina**</u> $\overrightarrow{AB}$ *je dužina kojoj se zna početna točka (hvatište)* A *i završna točka* B*, tj.* $(A, B) := \overrightarrow{AB}$.

Usmjerene dužine

Definicija

- **Usmjerena dužina** $\overrightarrow{AB}$ *je dužina kojoj se zna početna točka (hvatište) A i završna točka B, tj. $(A, B) := \overrightarrow{AB}$.*
- *Za dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A_1B_1}$ kažemo da su ekvivalentne ako postoji translacija koja prevodi jednu u drugu, tj. ako je četverokut ABB_1A_1 paralelogram (dužine AB_1 i A_1B imaju zajedničko polovište). Pišemo $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A_1B_1}$.*

Usmjerene dužine

Definicija

- **Usmjerena dužina** $\overrightarrow{AB}$ *je dužina kojoj se zna početna točka (hvatište) A i završna točka B, tj. $(A, B) := \overrightarrow{AB}$.*
- *Za dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A_1B_1}$ kažemo da su ekvivalentne ako postoji translacija koja prevodi jednu u drugu, tj. ako je četverokut ABB_1A_1 paralelogram (dužine AB_1 i A_1B imaju zajedničko polovište). Pišemo $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A_1B_1}$.*
- *Sve međusobno ekvivalentne usmjerene dužine tvore klasu koju nazivamo* **vektor**.

Usmjerene dužine

Definicija

- **Usmjerena dužina** $\overrightarrow{AB}$ *je dužina kojoj se zna početna točka (hvatište)* A *i završna točka* B, *tj.* $(A, B) := \overrightarrow{AB}$.
- *Za dvije usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{A_1B_1}$ *kažemo da su ekvivalentne ako postoji translacija koja prevodi jednu u drugu, tj. ako je četverokut* ABB_1A_1 *paralelogram (dužine* AB_1 *i* A_1B *imaju zajedničko polovište). Pišemo* $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A_1B_1}$.
- *Sve međusobno ekvivalentne usmjerene dužine tvore klasu koju nazivamo* **vektor**.
- *Pojedinu usmjerenu dužinu iz svake klase nazivamo predstavnikom te klase.*

Usmjerene dužine i vektori

- Vektore označavamo:
$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right],$$
gdje je $\overrightarrow{AB}$ neki predstavnik dane klase - vektora (kažemo da je vektor "sveden" na početak A).

- Vektore označavamo:

$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right],$$

gdje je $\overrightarrow{AB}$ neki predstavnik dane klase - vektora (kažemo da je vektor "sveden" na početak A).

- Geometrijski, vektor $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, u ravnini ili prostoru, određen je s tri podatka:

Usmjerene dužine i vektori

- Vektore označavamo:
$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right],$$
gdje je $\overrightarrow{AB}$ neki predstavnik dane klase - vektora (kažemo da je vektor "sveden" na početak A).
- Geometrijski, vektor $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, u ravnini ili prostoru, određen je s tri podatka:
  - **nosačem** - pravac (određen točkama A i B)

Usmjerene dužine i vektori

- Vektore označavamo:
$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right],$$
gdje je $\overrightarrow{AB}$ neki predstavnik dane klase - vektora (kažemo da je vektor "sveden" na početak A).
- Geometrijski, vektor $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, u ravnini ili prostoru, određen je s tri podatka:
  - **nosačem** - pravac (određen točkama A i B)
  - **orijentacijom** na tom pravcu **(**od A prema B)

Usmjerene dužine i vektori

- Vektore označavamo:
$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right],$$
gdje je $\overrightarrow{AB}$ neki predstavnik dane klase - vektora (kažemo da je vektor "sveden" na početak A).
- Geometrijski, vektor $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, u ravnini ili prostoru, određen je s tri podatka:
    - **nosačem** - pravac (određen točkama A i B)
    - **orijentacijom** na tom pravcu **(**od A prema B)
    - **duljinom ili normom** $\left|\overrightarrow{a}\right| = d\,(A, B)$

Usmjerene dužine i vektori

- Vektore označavamo:
$$\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right],$$
gdje je $\overrightarrow{AB}$ neki predstavnik dane klase - vektora (kažemo da je vektor "sveden" na početak A).
- Geometrijski, vektor $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, u ravnini ili prostoru, određen je s tri podatka:
  - **nosačem** - pravac (određen točkama A i B)
  - **orijentacijom** na tom pravcu (od A prema B)
  - **duljinom ili normom** $\left|\overrightarrow{a}\right| = d(A, B)$
- **Nosač + orijentacija = smjer.**

Usmjerene dužine i vektori

- Usmjerene dužine koje leže na paralelnim pravcima te imaju istu orijentaciju i jednaku duljinu definiraju isti vektor.

- Usmjerene dužine koje leže na paralelnim pravcima te imaju istu orijentaciju i jednaku duljinu definiraju isti vektor.
- Neprecizna oznaka za vektor: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$.

Usmjerene dužine i vektori

- Usmjerene dužine koje leže na paralelnim pravcima te imaju istu orijentaciju i jednaku duljinu definiraju isti vektor.
- Neprecizna oznaka za vektor: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$.
- Skup svih vektora označavamo sa V (vektore u ravnini sa V^2, a vektore u prostoru sa V^3).

- Usmjerene dužine koje leže na paralelnim pravcima te imaju istu orijentaciju i jednaku duljinu definiraju isti vektor.
- Neprecizna oznaka za vektor: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$.
- Skup svih vektora označavamo sa V (vektore u ravnini sa V^2, a vektore u prostoru sa V^3).
- Neka je O istaknuta (čvrsta točka) u prostoru. Za svaki vektor $\overrightarrow{a}$ moguće je odabrati njegovog predstavnika, tako da mu početna točka bude O.

Usmjerene dužine i vektori

- Usmjerene dužine koje leže na paralelnim pravcima te imaju istu orijentaciju i jednaku duljinu definiraju isti vektor.
- Neprecizna oznaka za vektor: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$.
- Skup svih vektora označavamo sa V (vektore u ravnini sa V^2, a vektore u prostoru sa V^3).
- Neka je O istaknuta (čvrsta točka) u prostoru. Za svaki vektor $\overrightarrow{a}$ moguće je odabrati njegovog predstavnika, tako da mu početna točka bude O.
- Vektor (usmjerenu dužinu) $\overrightarrow{OT}$ nazivamo **radijus-vektor** ili **vektor položaja** točke T. Označimo sa V_0 skup svih radijus-vektora s početkom u O.

Vektori

Definicija

- *Za dva vektora* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *kažemo da su* **kolinearna** *ako točke* O, A, B *pripadaju istom pravcu.*

Vektori

Definicija

- *Za dva vektora* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *kažemo da su* **kolinearna** *ako točke* O, A, B *pripadaju istom pravcu.*
- *Vektori* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *imaju istu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s iste strane točke* O*, a imaju različitu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s različitih strana točke* O.

Vektori

Definicija

- *Za dva vektora* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *kažemo da su* **kolinearna** *ako točke* O, A, B *pripadaju istom pravcu.*
- *Vektori* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *imaju istu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s iste strane točke* O, *a imaju različitu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s različitih strana točke* O.

- **Nul-vektor** $\overrightarrow{0}$ je (jedini) vektor duljine 0. Dakle, $\left|\overrightarrow{0}\right| = 0$.

Vektori

Definicija

- *Za dva vektora* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *kažemo da su* **kolinearna** *ako točke* O, A, B *pripadaju istom pravcu.*
- *Vektori* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *imaju istu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s iste strane točke* O*, a imaju različitu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s različitih strana točke* O.

- **Nul-vektor** $\overrightarrow{0}$ je (jedini) vektor duljine 0. Dakle, $\left|\overrightarrow{0}\right| = 0$.
- Nema smisla govoriti o smjeru. Vrijedi: $\overrightarrow{0} = \left[\overrightarrow{AA}\right]$, $\forall A \in E^3$.

Definicija

- *Za dva vektora* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *kažemo da su* **kolinearna** *ako točke* O, A, B *pripadaju istom pravcu.*
- *Vektori* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *imaju istu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s iste strane točke* O, *a imaju različitu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s različitih strana točke* O.

- **Nul-vektor** $\overrightarrow{0}$ je (jedini) vektor duljine 0. Dakle, $\left|\overrightarrow{0}\right| = 0$.
- Nema smisla govoriti o smjeru. Vrijedi: $\overrightarrow{0} = \left[\overrightarrow{AA}\right], \forall A \in E^3$.
- **Jedinični vektor** $\overrightarrow{e}$ je vektor duljine 1. Dakle, $|\overrightarrow{e}| = 1$.

Vektori

Definicija

- *Za dva vektora* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *kažemo da su* **kolinearna** *ako točke* O, A, B *pripadaju istom pravcu.*
- *Vektori* $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *imaju istu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s iste strane točke* O*, a imaju različitu orjentaciju ako se točke* A *i* B *nalaze s različitih strana točke* O.

- **Nul-vektor** $\overrightarrow{0}$ je (jedini) vektor duljine 0. Dakle, $\left|\overrightarrow{0}\right| = 0$.
- Nema smisla govoriti o smjeru. Vrijedi: $\overrightarrow{0} = \left[\overrightarrow{AA}\right]$, $\forall A \in E^3$.
- **Jedinični vektor** $\overrightarrow{e}$ je vektor duljine 1. Dakle, $|\overrightarrow{e}| = 1$.
- **Suprotni vektor** vektora $\overrightarrow{a}$ je vektor $-\overrightarrow{a}$ koji ima isti pravac i duljinu kao vektor $\overrightarrow{a}$, ali suprotnu orijentaciju od $\overrightarrow{a}$. Dakle, ako je $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, onda je $-\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{BA}\right]$.

Operacije s vektorima

Definicija

Neka su $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{BC}\right]$ *vektori.* *Zbroj vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor*

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{AB}\right] + \left[\overrightarrow{BC}\right] = \left[\overrightarrow{AC}\right]$$

(pravilo trokuta)

Operacije s vektorima

Definicija

Neka su $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{BC}\right]$ *vektori.* *<u>Zbroj vektora</u>* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor*

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{AB}\right] + \left[\overrightarrow{BC}\right] = \left[\overrightarrow{AC}\right]$$

(pravilo trokuta) ili, ako je $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *onda je*

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OC}\right],$$

gdje je C četvrti vrh paralelograma definiranog točkama O, A, B (pravilo paralelograma).

Operacije s vektorima

Definicija

Neka su $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{BC}\right]$ *vektori.* *Zbroj vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor*

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{AB}\right] + \left[\overrightarrow{BC}\right] = \left[\overrightarrow{AC}\right]$$

(pravilo trokuta) ili, ako je $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *onda je*

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OC}\right],$$

gdje je C četvrti vrh paralelograma definiranog točkama O, A, B (pravilo paralelograma).

Poopćenje:

$$\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \cdots + \overrightarrow{a_n} = \left[\overrightarrow{A_0A_1}\right] + \left[\overrightarrow{A_1A_2}\right] + \cdots + \left[\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right] = \left[\overrightarrow{A_0A_n}\right]$$

Svojstva zbrajanja vektora

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori, tada vrijedi:

- $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti)

Svojstva zbrajanja vektora

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori, tada vrijedi:

- $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ (svojstvo nul-vektora)

Svojstva zbrajanja vektora

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori, tada vrijedi:

- $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ (svojstvo nul-vektora)
- $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (svojstvo suprotnog vektora)

Svojstva zbrajanja vektora

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori, tada vrijedi:

- $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ (svojstvo nul-vektora)
- $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (svojstvo suprotnog vektora)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (svojstvo komutativnosti)

Svojstva zbrajanja vektora

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori, tada vrijedi:

- $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ (svojstvo nul-vektora)
- $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (svojstvo suprotnog vektora)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (svojstvo komutativnosti)

Svojstva zbrajanja vektora

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori, tada vrijedi:

- $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{a}+\left(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti)
- $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$ (svojstvo nul-vektora)
- $\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ (svojstvo suprotnog vektora)
- $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}$ (svojstvo komutativnosti)

Definiramo oduzimanje vektora:

$$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=:\overrightarrow{a}+\left(-\overrightarrow{b}\right),$$

Svojstva zbrajanja vektora

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ vektori, tada vrijedi:

- $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ (svojstvo nul-vektora)
- $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = -\overrightarrow{a} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (svojstvo suprotnog vektora)
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (svojstvo komutativnosti)

Definiramo oduzimanje vektora:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} =: \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right),$$

ili, ako je $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ onda je

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{BA}\right].$$

Definicija

Neka je $\overrightarrow{a}$ vektor i $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkt skalara λ i vektora $\overrightarrow{a}$ je vektor $\overrightarrow{c} = \lambda \overrightarrow{a}$ zadan sa:

- $|\lambda \overrightarrow{a}| = |\lambda| \, |\overrightarrow{a}|$

Množenje vektora skalarom

Definicija

Neka je $\overrightarrow{a}$ *vektor i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *<u>Produkt skalara</u>* λ *<u>i vektora</u>* $\overrightarrow{a}$ *je vektor* $\overrightarrow{c} = \lambda \overrightarrow{a}$ *zadan sa:*

- $|\lambda \overrightarrow{a}| = |\lambda| \, |\overrightarrow{a}|$
- *vektori* $\overrightarrow{a}$ *i* $\lambda \overrightarrow{a}$ *su kolinearni*

Množenje vektora skalarom

Definicija

Neka je $\overrightarrow{a}$ vektor i $\lambda \in \mathbb{R}$. <u>Produkt skalara λ i vektora $\overrightarrow{a}$</u> je vektor $\overrightarrow{c} = \lambda \overrightarrow{a}$ zadan sa:

- $|\lambda \overrightarrow{a}| = |\lambda| \, |\overrightarrow{a}|$
- *vektori $\overrightarrow{a}$ i $\lambda \overrightarrow{a}$ su kolinearni*
- *ako je $\lambda > 0$ onda $\overrightarrow{a}$ i $\lambda \overrightarrow{a}$ imaju istu orijentaciju, a ako je $\lambda < 0$ onda $\overrightarrow{a}$ i $\lambda \overrightarrow{a}$ imaju suprotnu orijentaciju.*

Množenje vektora skalarom

Definicija

Neka je $\vec{a}$ *vektor i* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Produkt skalara* λ *i vektora* $\vec{a}$ *je vektor* $\vec{c} = \lambda \vec{a}$ *zadan sa:*

- $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \, |\vec{a}|$
- *vektori* $\vec{a}$ *i* $\lambda \vec{a}$ *su kolinearni*
- *ako je* $\lambda > 0$ *onda* $\vec{a}$ *i* $\lambda \vec{a}$ *imaju istu orijentaciju, a ako je* $\lambda < 0$ *onda* $\vec{a}$ *i* $\lambda \vec{a}$ *imaju suprotnu orijentaciju.*
- *Za* $\lambda = 0$ *je* $|\lambda \vec{a}| = 0$, *pa je* $\lambda \vec{a}$ *nul-vektor.*

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)
- $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju skalara)

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)
- $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju skalara)
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{a}=\lambda(\mu\overrightarrow{a})$ (kvaziasocijativnost)

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju skalara)
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a})$ (kvaziasocijativnost)
- $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)
- $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju skalara)
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{a}=\lambda(\mu\overrightarrow{a})$ (kvaziasocijativnost)
- $1\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$
- $-1\cdot\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}$

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju skalara)
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a})$ (kvaziasocijativnost)
- $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$
- $-1 \cdot \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$
- $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)
- $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju skalara)
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{a}=\lambda(\mu\overrightarrow{a})$ (kvaziasocijativnost)
- $1\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$
- $-1\cdot\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}$
- $\lambda\cdot\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$, za svaki $\lambda\in\mathbb{R}$
- $0\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$, za svaki $\overrightarrow{a}\in V^3$

Svojstva množenja vektora skalarom

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi:

- $\lambda\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\lambda\overrightarrow{a}+\lambda\overrightarrow{b}$ (distributivnost prema zbrajanju vektora)
- $(\lambda+\mu)\overrightarrow{a}=\lambda\overrightarrow{a}+\mu\overrightarrow{a}$ (distributivnost prema zbrajanju skalara)
- $(\lambda\mu)\overrightarrow{a}=\lambda(\mu\overrightarrow{a})$ (kvaziasocijativnost)
- $1\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}$
- $-1\cdot\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}$
- $\lambda\cdot\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$, za svaki $\lambda\in\mathbb{R}$
- $0\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$, za svaki $\overrightarrow{a}\in V^3$
- ako je $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$ onda je $\frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\cdot\overrightarrow{a}=:\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=\overrightarrow{e}$ jedinični vektor

Koordinatizacija pravca

- odaberimo (brojevni) pravac **p**

Koordinatizacija pravca

- odaberimo (brojevni) pravac **p**
- točku kojoj je pridružena 0 označimo sa O, a točku kojoj je pridružena 1 označimo sa I

Koordinatizacija pravca

- odaberimo (brojevni) pravac **p**
- točku kojoj je pridružena 0 označimo sa O, a točku kojoj je pridružena 1 označimo sa I
- vektor $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ je jedinični vektor $\left(\left|\overrightarrow{OI}\right| = d\left(O, I\right) = 1\right)$

Koordinatizacija pravca

- odaberimo (brojevni) pravac **p**
- točku kojoj je pridružena 0 označimo sa O, a točku kojoj je pridružena 1 označimo sa I
- vektor $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ je jedinični vektor $\left(\left|\overrightarrow{OI}\right| = d\left(O, I\right) = 1\right)$
- tako smo na pravcu **p** zadali koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}\right)$

Koordinatizacija pravca

- odaberimo (brojevni) pravac **p**
- točku kojoj je pridružena 0 označimo sa O, a točku kojoj je pridružena 1 označimo sa I
- vektor $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ je jedinični vektor $\left(\left|\overrightarrow{OI}\right| = d(O, I) = 1\right)$
- tako smo na pravcu **p** zadali koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}\right)$
- svakoj točki $T \in \mathbf{p}$ je jednoznačno pridružen realni broj x (apscisa) i vektor $\overrightarrow{OT}$. Vrijedi:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OT} = x \cdot \overrightarrow{OI} = x \cdot \overrightarrow{i} =: [x]$$

Koordinatizacija pravca

- odaberimo (brojevni) pravac **p**
- točku kojoj je pridružena 0 označimo sa O, a točku kojoj je pridružena 1 označimo sa I
- vektor $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}$ je jedinični vektor $\left(\left|\overrightarrow{OI}\right| = d\left(O, I\right) = 1\right)$
- tako smo na pravcu **p** zadali <u>koordinatni sustav</u> $\left(0, \overrightarrow{i}\right)$
- svakoj točki $T \in \mathbf{p}$ je jednoznačno pridružen realni broj x (apscisa) i vektor $\overrightarrow{OT}$. Vrijedi:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OT} = x \cdot \overrightarrow{OI} = x \cdot \overrightarrow{i} =: [x]$$

- za točke $T, S \in \mathbf{p}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda\overrightarrow{OT} + \mu\overrightarrow{OS} = \lambda\left(x \cdot \overrightarrow{i}\right) + \mu\left(x' \cdot \overrightarrow{i}\right) = \left[\lambda x + \mu x'\right].$$

(svedeno na operacije s brojevima)

Koordinatizacija ravnine

- odaberimo dva okomita pravca **p** i **q** koji se sijeku u točki O

Koordinatizacija ravnine

- odaberimo dva okomita pravca **p** i **q** koji se sijeku u točki O
- na pravcu **p** zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}\right)$, a na pravcu **q** zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{j}\right)$ tako da je

$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}, \qquad \left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = 1,$$

  i tako da točka I, rotacijom za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smjeru, prelazi u točku J

Koordinatizacija ravnine

- odaberimo dva okomita pravca **p** i **q** koji se sijeku u točki O
- na pravcu **p** zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}\right)$, a na pravcu **q** zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{j}\right)$ tako da je

$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}, \qquad \left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = 1,$$

  i tako da točka I, rotacijom za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smjeru, prelazi u točku J
- ovim smo u ravnini π zadali
  desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Koordinatizacija ravnine

- odaberimo dva okomita pravca **p** i **q** koji se sijeku u točki O
- na pravcu **p** zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}\right)$, a na pravcu **q** zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{j}\right)$ tako da je
$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}, \qquad \left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = 1,$$
i tako da točka I, rotacijom za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smjeru, prelazi u točku J
- ovim smo u ravnini π zadali
<u>desni pravokutni koordinatni sustav</u> $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$
- svakoj točki $T \in \pi$ je jednoznačno pridružen uređeni par realnih brojeva (x, y) i vektor $\overrightarrow{OT}$. Vrijedi:
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} =: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Koordinatizacija ravnine

- pravac **p** – <u>os apscisa</u> ili x-os

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os

Koordinatizacija ravnine

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os
- x i y - koordinate točke T; x je apscisa, a y je ordinata

Koordinatizacija ravnine

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os
- x i y - koordinate točke T; x je apscisa, a y je ordinata
- x i y - skalarne komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$

Koordinatizacija ravnine

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os
- x i y - koordinate točke T; x je apscisa, a y je ordinata
- x i y - skalarne komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- $x\overrightarrow{i}$ i $y\overrightarrow{j}$ - vektorske komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$

Koordinatizacija ravnine

- pravac **p** – <u>os apscisa</u> ili x-os
- pravac **q** – <u>os ordinata</u> ili y-os
- x i y - <u>koordinate</u> točke T; x je <u>apscisa</u>, a y je <u>ordinata</u>
- x i y - <u>skalarne komponente</u> radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- $x\,\overrightarrow{i}$ i $y\,\overrightarrow{j}$ - <u>vektorske komponente</u> radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- za točke $T, S \in \boldsymbol{\pi}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda \overrightarrow{OT} + \mu \overrightarrow{OS} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \end{bmatrix}$$

Koordinatizacija prostora

- odabiremo u prostoru $\mathbf{E}^3$ tri međusobno okomita (brojevna) pravaca $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ koji se svi sijeku u točki O

Koordinatizacija prostora

- odabiremo u prostoru $\mathbf{E}^3$ tri međusobno okomita (brojevna) pravaca $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ koji se svi sijeku u točki O
- u ravnini π određenoj pravcima $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ zadamo desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ na ranije opisani način

Koordinatizacija prostora

- odabiremo u prostoru $\mathbf{E}^3$ tri međusobno okomita (brojevna) pravaca $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ koji se svi sijeku u točki O
- u ravnini π određenoj pravcima $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ zadamo desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ na ranije opisani način
- na pravcu $\mathbf{r}$ zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{k}\right)$, tako da vektori $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ zadovoljavaju <u>pravilo desnog vijka</u>

- odabiremo u prostoru $\mathbf{E}^3$ tri međusobno okomita (brojevna) pravaca **p**, **q** i **r** koji se svi sijeku u točki O
- u ravnini π određenoj pravcima **p** i **q** zadamo desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ na ranije opisani način
- na pravcu **r** zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \vec{k}\right)$, tako da vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ zadovoljavaju pravilo desnog vijka
- ovim smo u prostoru $\mathbf{E}^3$ zadali desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ i pri tome vrijedi

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{OJ}, \quad \vec{k} = \overrightarrow{OK}, \qquad \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

Koordinatizacija prostora

- odabiremo u prostoru $\mathbf{E}^3$ tri međusobno okomita (brojevna) pravaca $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ koji se svi sijeku u točki O
- u ravnini π određenoj pravcima $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ zadamo desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ na ranije opisani način
- na pravcu $\mathbf{r}$ zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{k}\right)$, tako da vektori $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$ zadovoljavaju pravilo desnog vijka
- ovim smo u prostoru $\mathbf{E}^3$ zadali desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ i pri tome vrijedi

$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \overrightarrow{j} = \overrightarrow{OJ}, \quad \overrightarrow{k} = \overrightarrow{OK}, \qquad \left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = \left|\overrightarrow{k}\right| = 1$$

- svakoj točki $T \in \mathbf{E}^3$ je jednoznačno pridružena uređena trojka realnih brojeva (x, y, z) i vektor $\overrightarrow{OT}$. Vrijedi:

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} =: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Koordinatizacija prostora

- pravac **p** – os apscisa ili x-os

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os

Koordinatizacija prostora

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os
- pravac **r** – os aplikata ili z-os

Koordinatizacija prostora

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os
- pravac **r** – os aplikata ili z-os
- x, y, z - koordinate točke T; x je apscisa, y je ordinata, a z aplikata

Koordinatizacija prostora

- pravac **p** – <u>os apscisa</u> ili x-os
- pravac **q** – <u>os ordinata</u> ili y-os
- pravac **r** – <u>os aplikata</u> ili z-os
- x, y, z - <u>koordinate</u> točke T; x je <u>apscisa</u>, y je <u>ordinata</u>, a z <u>aplikata</u>
- x, y, z - <u>skalarne komponente</u> radijus vektora $\overrightarrow{OT}$

Koordinatizacija prostora

- pravac **p** – <u>os apscisa</u> ili x-os
- pravac **q** – <u>os ordinata</u> ili y-os
- pravac **r** – <u>os aplikata</u> ili z-os
- x, y, z - <u>koordinate</u> točke T; x je <u>apscisa</u>, y je <u>ordinata</u>, a z <u>aplikata</u>
- x, y, z - <u>skalarne komponente</u> radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- $x\overrightarrow{i}, y\overrightarrow{j}, z\overrightarrow{k}$ - <u>vektorske komponente</u> radijus vektora $\overrightarrow{OT}$

Koordinatizacija prostora

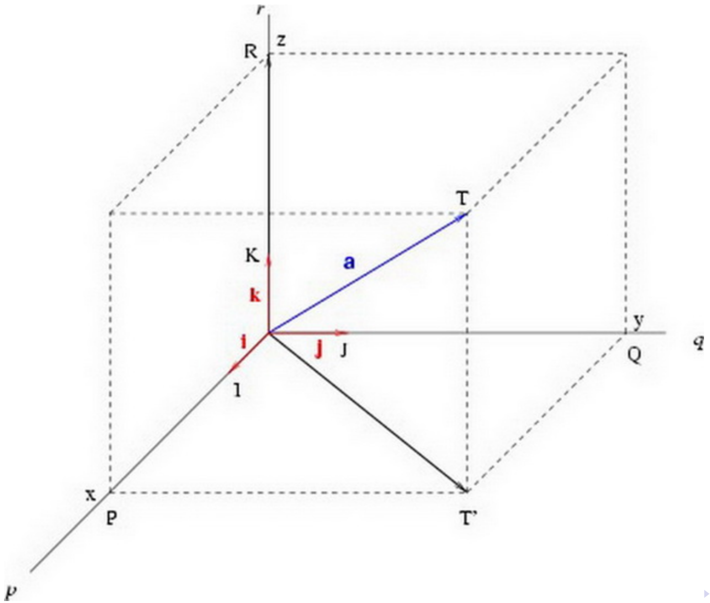
- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os
- pravac **r** – os aplikata ili z-os
- x, y, z - koordinate točke T; x je apscisa, y je ordinata, a z aplikata
- x, y, z - skalarne komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- $x\overrightarrow{i}, y\overrightarrow{j}, z\overrightarrow{k}$ - vektorske komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- prostor $\mathbf{E}^3$ je podijeljen u 8 oktanata

Koordinatizacija prostora

- pravac **p** – os apscisa ili x-os
- pravac **q** – os ordinata ili y-os
- pravac **r** – os aplikata ili z-os
- x, y, z - koordinate točke T; x je apscisa, y je ordinata, a z aplikata
- x, y, z - skalarne komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- $x\overrightarrow{i}, y\overrightarrow{j}, z\overrightarrow{k}$ - vektorske komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$
- prostor $\mathbf{E}^3$ je podijeljen u 8 oktanata
- za točke $T, S \in \mathbf{E}^3$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda\overrightarrow{OT} + \mu\overrightarrow{OS} + = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix}$$

Koordinatizacija prostora



Koordinatizacija prostora

Neka je u koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ zadan vektor $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Tada je:

Koordinatizacija prostora

Neka je u koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ zadan vektor $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Tada je:

- duljina ili norma vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OT}$ jednaka

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(vidi se geometrijski: $\left|\overrightarrow{OT}\right| = d\left(O, T\right)$).

Neka je u koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ zadan vektor $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Tada je:

- duljina ili norma vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OT}$ jednaka

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

  (vidi se geometrijski: $\left|\overrightarrow{OT}\right| = d\left(O, T\right)$).

- ako je $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, onda je pripadni jedinični vektor jednak

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

  ($|\overrightarrow{a_0}| = \left|\frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot \overrightarrow{a}\right| = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|} \cdot |\overrightarrow{a}| = 1$).

Definicija

Neka su $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ *vektori u prostoru* $\mathbf{E}^3$ *i* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. *Vektor*

$$\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k}$$

nazivamo **linearna kombinacija** *vektora* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$.

Linearna nezavisnost

Definicija

Neka su $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ *vektori u prostoru* $\mathbf{E}^3$ *i* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. *Vektor*

$$\overrightarrow{a} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k}$$

nazivamo **linearna kombinacija** *vektora* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$.

Definicija

Za vektore $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ *kažemo da su* **linearno nezavisni** *ako za sve* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

U protivnom kažemo da su vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ **linearno zavisni**.

Linearna nezavisnost

Drugim riječima, za vektore $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ kažemo da su linearno zavisni ako postoje skalari λ_1,λ_2, ...,$\lambda_k \in \mathbb{R}$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}.$$

Linearna nezavisnost

Drugim riječima, za vektore $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ kažemo da su linearno zavisni ako postoje skalari λ_1,λ_2, ...,$\lambda_k \in \mathbb{R}$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}.$$

Ako su vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}$ linearno zavisni, onda barem jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju ostalih,

Linearna nezavisnost

Drugim riječima, za vektore $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ kažemo da su linearno zavisni ako postoje skalari λ_1,λ_2, ...,$\lambda_k \in \mathbb{R}$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}.$$

Ako su vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ linearno zavisni, onda barem jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju ostalih, i obratno, ako se barem jedan od vektora $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ može izraziti kao linearna kombinacija ostalih, onda su vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k}$ linearno zavisni.

Linearna nezavisnost

- **dva** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **kolinearna**

Linearna nezavisnost

- **dva** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **kolinearna**
- **tri** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **komplanarna**

Linearna nezavisnost

- **dva** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **kolinearna**
- **tri** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **komplanarna**
- svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna

Linearna nezavisnost

- **dva** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **kolinearna**
- **tri** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **komplanarna**
- svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna
- Svaka tri linearno nezavisna vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ u prostoru $\mathbf{E}^3$ čine <u>**bazu prostora**</u> $\mathbf{E}^3$

Linearna nezavisnost

- **dva** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **kolinearna**
- **tri** vektora su linearno zavisna ako i samo ako su **komplanarna**
- svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna
- Svaka tri linearno nezavisna vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ u prostoru $\mathbf{E}^3$ čine **bazu prostora** $\mathbf{E}^3$
- To znači da se svaki vektor $\vec{d}$ u prostoru $\mathbf{E}^3$ može na jedinstven način izraziti kao linearna kombinacija vektora baze $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$

$$\overrightarrow{d} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c} \text{ za neke } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Skalarni produkt

Definicija

Kut između vektora $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *je (manji) kut između usmjerenih dužina* $\overrightarrow{OA}$ *i* $\overrightarrow{OB}$*, tj.*

$$\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) =: \measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right), \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Skalarni produkt

Definicija

Kut između vektora $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ *je (manji) kut između usmjerenih dužina* $\overrightarrow{OA}$ *i* $\overrightarrow{OB}$*, tj.*

$$\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) =: \measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right), \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i neka je* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

Skalarni umnožak *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je realan broj (skalar)*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Svojstva skalarnog produkta

Napomena

Napomena: *Ako je* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *ili* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *onda* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *nije definiran, pa definiramo*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =: 0.$$

Svojstva skalarnog produkta

Napomena

Napomena: *Ako je* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *ili* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *onda* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *nije definiran, pa definiramo*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =: 0.$$

Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- S1 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ (tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$)

Svojstva skalarnog produkta

Napomena

Napomena: Ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *ili* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *onda* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *nije definiran, pa definiramo*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =: 0.$$

Neka su $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- S1 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ (tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$)
- S2 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$

Svojstva skalarnog produkta

Napomena

Napomena: *Ako je* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *ili* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *onda* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *nije definiran, pa definiramo*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =: 0.$$

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- S1 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ (tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$)
- S2 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$
- S3 $\lambda\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \left(\lambda \overrightarrow{b}\right)$ (homogenost)

Svojstva skalarnog produkta

Napomena

Napomena: *Ako je* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *ili* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, *onda* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *nije definiran, pa definiramo*

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =: 0.$$

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- S1 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$ (tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$)
- S2 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$
- S3 $\lambda\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \left(\lambda \overrightarrow{b}\right)$ (homogenost)
- S4 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$ (komutativnost)

Svojstva skalarnog produkta

Napomena

Napomena: Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, onda $\varphi = \measuredangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ nije definiran, pa definiramo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} =: 0.$$

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- S1 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{a} \perp \vec{b}$ (tj. $\varphi = \frac{\pi}{2}$)
- S2 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- S3 $\lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda \vec{b}\right)$ (homogenost)
- S4 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutativnost)
- S5 $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (distributivnost)

Svojstva skalarnog produkta

Primjer

Neka je $|\overrightarrow{a}| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ *i* $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. *Izračunajte*
$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right)$.

Svojstva skalarnog produkta

Primjer

Neka je $|\vec{a}| = 1$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ *i* $\vec{a} \perp \vec{b}$. *Izračunajte* $\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right)$.

$$\left(2\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) \overset{S5}{=}$$

$$= 2\vec{a} \cdot 3\vec{a} + 2\vec{a} \cdot 2\vec{b} + \left(-\vec{b}\right) \cdot 3\vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \cdot 2\vec{b} \overset{S3,S2}{=}$$

$$= 6|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\left|\vec{b}\right|^2 \overset{S1.}{=} 6 \cdot 1^2 + 0 - 2 \cdot 2^2 = -2$$

Projekcija vektora na vektor

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right] \neq \overrightarrow{0}$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$. *Neka je točka* B' *ortogonalna projekcija točke* B *na pravac određen točkama* 0 *i* A. *Tada vektor*

$$\overrightarrow{b_{\overrightarrow{a}}} = \left[\overrightarrow{OB'}\right] = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi \frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi \cdot \overrightarrow{a_0}$$

nazivamo **vektorska projekcija vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$.**

Projekcija vektora na vektor

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right] \neq \overrightarrow{0}$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$. *Neka je točka* B' *ortogonalna projekcija točke* B *na pravac određen točkama* 0 *i* A. *Tada vektor*

$$\overrightarrow{b_{\overrightarrow{a}}} = \left[\overrightarrow{OB'}\right] = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi \frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi \cdot \overrightarrow{a_0}$$

nazivamo **vektorska projekcija vektora** $\overrightarrow{b}$ **na vektor** $\overrightarrow{a}$**.**

Skalar

$$\pi_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{b}\right) = b_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi$$

nazivamo **skalarna projekcija vektora** $\overrightarrow{b}$ **na vektor** $\overrightarrow{a}$.

Projekcija vektora na vektor

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right] \neq \overrightarrow{0}$ *i* $\overrightarrow{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$. *Neka je točka* B' *ortogonalna projekcija točke* B *na pravac određen točkama* 0 *i* A. *Tada vektor*

$$\overrightarrow{b_{\overrightarrow{a}}} = \left[\overrightarrow{OB'}\right] = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi \frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi \cdot \overrightarrow{a_0}$$

nazivamo **vektorska projekcija vektora** $\overrightarrow{b}$ **na vektor** $\overrightarrow{a}$**.**

Skalar

$$\pi_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{b}\right) = b_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi$$

nazivamo **skalarna projekcija vektora** $\overrightarrow{b}$ **na vektor** $\overrightarrow{a}$.

Vrijedi: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| b_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| a_{\overrightarrow{b}}$

Skalarni produkt i koordinatizacija

U pravokutnom koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, iz definicije skalarnog umnoška, slijedi:

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1, \tag{1.1}$$

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0 \quad \stackrel{S4}{\Rightarrow} \quad \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0. \tag{1.2}$$

Skalarni produkt i koordinatizacija

U pravokutnom koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, iz definicije skalarnog umnoška, slijedi:

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1, \tag{1.1}$$

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0 \quad \overset{S4}{\Rightarrow} \quad \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0. \tag{1.2}$$

Za vektore $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$ je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \cdot \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) = \cdots (\text{svojstva})$$

$$= a_x b_x \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + a_x b_y \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + \cdots + a_z b_y \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} + a_z b_z \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} =$$

$$= \cdots (1.1 \text{ i } 1.2) \cdots = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Skalarni produkt i koordinatizacija

Specijalno vrijedi:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\overrightarrow{a}|^2 .$$

Skalarni produkt i koordinatizacija

Specijalno vrijedi:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\overrightarrow{a}|^2 .$$

Kut između vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$:

$$\cos \measuredangle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Prikloni kutevi

<u>Prikloni kutevi</u> α, β, γ vektora $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ su kutevi koje taj vektor zatvara s vektorima $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$, redom.

Prikloni kutevi

<u>Prikloni kutevi</u> α, β, γ vektora $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} \neq \overrightarrow{0}$ su kutevi koje taj vektor zatvara s vektorima $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ i $\overrightarrow{k}$, redom.
Budući je

$$\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}\right) = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}_0, \overrightarrow{i}\right),$$

onda je

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i}}{\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{i}\right|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\
\cos\beta &= \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{j}}{\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{j}\right|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\
\cos\gamma &= \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{k}\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{k}}{\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{k}\right|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.
\end{aligned}$$

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i neka je* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

Vektorski umnožak *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *sa svojstvima:*

1. $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$

Vektorski produkt

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i neka je* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

<u>**Vektorski umnožak**</u> *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *sa svojstvima:*

1. $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$
2. $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a} \qquad i \qquad \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{b}$

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i neka je* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

<u>**Vektorski umnožak**</u> *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *sa svojstvima:*

1. $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$
2. $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a} \quad i \quad \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{b}$
3. *Trojka* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$ *čini desni koordinatni sustav.*

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i neka je* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

Vektorski umnožak *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *sa svojstvima:*

1. $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$
2. $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a} \qquad i \qquad \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{b}$
3. *Trojka* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$ *čini desni koordinatni sustav.*

Vektorski produkt

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *i neka je* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

Vektorski umnožak *vektora* $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *je vektor* $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *sa svojstvima:*

1. $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$
2. $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a} \qquad i \qquad \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{b}$
3. *Trojka* $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$ *čini desni koordinatni sustav.*

Napomena

Ako je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ *ili* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ *onda* $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ *nije definiran, pa definiramo*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} =: \overrightarrow{0}$$

Svojstva vektorskog produkta

Geometrijska interpretacija: Duljina vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ jednaka je površini paralelograma P_{pg}, što ga definiraju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{a}| \cdot v_{\overrightarrow{a}} = P_{pg},$$

gdje je $v_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$ visina na stranicu (vektor) $\overrightarrow{a}$.

Svojstva vektorskog produkta

Geometrijska interpretacija: Duljina vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ jednaka je površini paralelograma P_{pg}, što ga definiraju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{a}| \cdot v_{\overrightarrow{a}} = P_{pg},$$

gdje je $v_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$ visina na stranicu (vektor) $\overrightarrow{a}$.

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:

- V1 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su kolinearni

Svojstva vektorskog produkta

Geometrijska interpretacija: Duljina vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ jednaka je površini paralelograma P_{pg}, što ga definiraju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{a}| \cdot v_{\overrightarrow{a}} = P_{pg},$$

gdje je $v_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$ visina na stranicu (vektor) $\overrightarrow{a}$.

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:

- V1 $\quad \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su kolinearni
- V2 $\quad \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right)$ (antikomutativnost)

Svojstva vektorskog produkta

Geometrijska interpretacija: Duljina vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ jednaka je površini paralelograma P_{pg}, što ga definiraju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{a}| \cdot v_{\overrightarrow{a}} = P_{pg},$$

gdje je $v_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$ visina na stranicu (vektor) $\overrightarrow{a}$.

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:

- V1 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su kolinearni
- V2 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right)$ (antikomutativnost)
- V3 $\lambda\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = (\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$ (homogenost)

Svojstva vektorskog produkta

<u>Geometrijska interpretacija:</u> Duljina vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ jednaka je površini paralelograma P_{pg}, što ga definiraju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot v_{\overrightarrow{a}} = P_{pg},$$

gdje je $v_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$ visina na stranicu (vektor) $\overrightarrow{a}$.

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:

- V1 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su kolinearni
- V2 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right)$ (antikomutativnost)
- V3 $\lambda\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = (\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$ (homogenost)
- V4 $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ (distributivnost).

Svojstva vektorskog produkta

<u>Geometrijska interpretacija:</u> Duljina vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ jednaka je površini paralelograma P_{pg}, što ga definiraju vektori $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{a}| \cdot v_{\overrightarrow{a}} = P_{pg},$$

gdje je $v_{\overrightarrow{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$ visina na stranicu (vektor) $\overrightarrow{a}$.

Neka su $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:

- V1 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su kolinearni
- V2 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right)$ (antikomutativnost)
- V3 $\lambda\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = (\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$ (homogenost)
- V4 $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ (distributivnost).
- V1' specijalno, vrijedi $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ za svaki vektor $\overrightarrow{a}$

Primjer

Neka je $|\overrightarrow{a}| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ *i* $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. *Izračunajte površinu paralelograma* P *što ga definiraju vektori* $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Primjer

Neka je $|\overrightarrow{a}| = 1, \left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ *i* $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. *Izračunajte površinu paralelograma P što ga definiraju vektori* $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

$$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \overset{V4}{=}$$

Primjer

Neka je $|\overrightarrow{a}| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ *i* $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. *Izračunajte površinu paralelograma* P *što ga definiraju vektori* $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

$$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \overset{V4}{=}$$

$$= 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{b} =$$

Primjer

Neka je $\left|\overrightarrow{a}\right| = 1, \left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ *i* $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. *Izračunajte površinu paralelograma* P *što ga definiraju vektori* $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

$$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \overset{V4}{=}$$

$$= 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{b} =$$

$$\overset{V2,V1',V3.}{=} \overrightarrow{0} + 2\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{0} = 3\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$$

Primjer

Neka je $|\overrightarrow{a}| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ *i* $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$. *Izračunajte površinu paralelograma* P *što ga definiraju vektori* $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

$$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \overset{V4}{=}$$

$$= 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{b} =$$

$$\overset{V2,V1',V3.}{=} \overrightarrow{0} + 2\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{0} = 3\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$$

Dakle

$$P = \left|3\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\right| = 3\,|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Vektorski produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ vrijedi:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

Vektorski produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ vrijedi:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k},$$

Vektorski produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ vrijedi:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}.$$

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ vrijedi:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}.$$

Za vektore $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$ je

Vektorski produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ vrijedi:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}.$$

Za vektore $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$ je

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \times \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) =$$

Vektorski produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ vrijedi:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}.$$

Za vektore $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$ je

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \times \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) =$$

$$= a_x b_x \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + a_x b_y \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + \cdots + a_z b_y \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} + a_z b_z \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} =$$

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ vrijedi:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k},$$

$$\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \overset{V2.}{\Rightarrow} \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}.$$

Za vektore $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$ je

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left(a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}\right) \times \left(b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}\right) =$$

$$= a_x b_x \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + a_x b_y \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + \cdots + a_z b_y \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} + a_z b_z \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) \overrightarrow{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \overrightarrow{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \overrightarrow{k}$$

Determinanta matrice trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

Determinanta matrice trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

- Zamjenom dvaju redaka (ili dvaju stupaca), determinanta mijenja predznak.

Determinanta matrice trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1$$

- Zamjenom dvaju redaka (ili dvaju stupaca), determinanta mijenja predznak.
- Ako elemente jednog stupca (ili retka) pomnožimo skalarom λ, onda se i vrijednost determinante množi s λ.

Determinanta matrice trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

- Zamjenom dvaju redaka (ili dvaju stupaca), determinanta mijenja predznak.
- Ako elemente jednog stupca (ili retka) pomnožimo skalarom λ, onda se i vrijednost determinante množi s λ.
- Ako su dva retka (ili dva stupca) proporcionalna, determinanta je 0.

Determinanta matrice trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

- Zamjenom dvaju redaka (ili dvaju stupaca), determinanta mijenja predznak.
- Ako elemente jednog stupca (ili retka) pomnožimo skalarom λ, onda se i vrijednost determinante množi s λ.
- Ako su dva retka (ili dva stupca) proporcionalna, determinanta je 0.
- Vektorski produkt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ se može izračunati pomoću determinante:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\overrightarrow{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\overrightarrow{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\overrightarrow{k}.$$

Mješoviti produkt

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$. **Mješoviti umnožak** *vektora* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *je umnožak (skalar)* $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$.

Mješoviti produkt

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$. **Mješoviti umnožak** *vektora* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *je umnožak (skalar)* $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$. *Oznaka:*

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =: \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$$

Mješoviti produkt

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$. **Mješoviti umnožak** *vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ je umnožak (skalar) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$. Oznaka:*

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =: \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$$

Svojstva:

- M1 $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ su komplanarni

Mješoviti produkt

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$. **Mješoviti umnožak** *vektora* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *i* $\overrightarrow{c}$ *je umnožak (skalar)* $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$. *Oznaka:*

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =: \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$$

Svojstva:

- M1 $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ su komplanarni
- M2 $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ čine desni koordinatni sustav

Mješoviti produkt

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$. **Mješoviti umnožak** *vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ je umnožak (skalar) $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c}$. Oznaka:*

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =: \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]$$

Svojstva:

- M1 $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ ili $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ su komplanarni
- M2 $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ čine desni koordinatni sustav
- M2' $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ čine lijevi koordinatni sustav

Mješoviti produkt

<u>Geometrijska interpretacija:</u> Vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ definiraju paralelepiped (volumena V).

Mješoviti produkt

Geometrijska interpretacija: Vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ definiraju paralelepiped (volumena V). Ako je

$$\psi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right),$$

onda je visina paralelepipeda na bazu (paralelogram) definiranu vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jednaka $v = \pm|\overrightarrow{c}| \cdot \cos\psi$.

Mješoviti produkt

<u>Geometrijska interpretacija:</u> Vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ definiraju paralelepiped (volumena V). Ako je

$$\psi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right),$$

onda je visina paralelepipeda na bazu (paralelogram) definiranu vektorima $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jednaka $v = \pm\left|\overrightarrow{c}\right| \cdot \cos\psi$.
Sada je

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| \cdot \left|\overrightarrow{c}\right| \cdot \cos\psi = P_{pg} \cdot (\pm v) = \pm V$$

odnosno

$$\left|\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right| = V$$

Mješoviti produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ za vektore

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k},$$
$$\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k} \text{ i}$$
$$\overrightarrow{c} = c_x \overrightarrow{i} + c_y \overrightarrow{j} + c_z \overrightarrow{k} \text{ vrijedi:}$$

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =$$

Mješoviti produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ za vektore

$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$,
$\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$ i
$\overrightarrow{c} = c_x \overrightarrow{i} + c_y \overrightarrow{j} + c_z \overrightarrow{k}$ vrijedi:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \left(c_x \overrightarrow{i} + c_y \overrightarrow{j} + c_z \overrightarrow{k}\right) =$$

Mješoviti produkt i koordinatizacija

U koordinatnom sustavu $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ za vektore

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$
$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \text{ i}$$
$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \text{ vrijedi:}$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \left(c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}\right) =$$

$$= \cdots (svojstva\ skal.\ umn.) \cdots = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Mješoviti produkt i koordinatizacija

Iz svojstava determinante slijedi:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]. \tag{1}$$

Mješoviti produkt i koordinatizacija

Iz svojstava determinante slijedi:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right]. \tag{1}$$

Budući je $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \overset{V2.}{=} -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{c}$ imamo

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right]. \tag{2}$$

Mješoviti produkt i koordinatizacija

Iz svojstava determinante slijedi:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]. \tag{1}$$

Budući je $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} \overset{V2.}{=} -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{c}$ imamo

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\right] = -\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]. \tag{2}$$

Svojstva (1) i (2) vrijede i ako vektori nisu zadani u koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Mješoviti produkt i koordinatizacija

Iz svojstava determinante slijedi:

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\right]. \tag{1}$$

Budući je $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} \overset{V2.}{=} -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{c}$ imamo

$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = -\left[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\right] = -\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\right] = -\left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right]. \tag{2}$$

Svojstva (1) i (2) vrijede i ako vektori nisu zadani u koordinatnom sustavu $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Budući da svaka tri nekomplanarna (ne-nul) vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ u prostoru $\mathbf{E}^3$ čine bazu prostora $\mathbf{E}^3$ ($\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ su linearno nezavisni), onda vrijedi:

$$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \text{ je baza } \mathbf{E}^3 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] \neq 0$$

- vektorski produkt **NIJE** asocijativan, tj. općenito vrijedi

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$$

Vektorsko-vektorski produkt vektora

- vektorski produkt **NIJE** asocijativan, tj. općenito vrijedi

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \times \left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}\right)$$

Definicija

Neka su dani vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$. **Vektorsko-vektorski umnožak** *vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ je vektor:*

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}.$$

Uočimo:

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je okomit na ravninu razapetu s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

Svojstva vektorsko-vektorskog produkta

Uočimo:

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je okomit na ravninu razapetu s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$
- $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ je okomit na $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$

Svojstva vektorsko-vektorskog produkta

Uočimo:

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je okomit na ravninu razapetu s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$
- $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ je okomit na $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
- Zaključak: $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ leži u ravnini razapetoj s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Svojstva vektorsko-vektorskog produkta

Uočimo:

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je okomit na ravninu razapetu s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$
- $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ je okomit na $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
- Zaključak: $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ leži u ravnini razapetoj s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.
- Dakle, $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ se može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Svojstva vektorsko-vektorskog produkta

Uočimo:

- $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je okomit na ravninu razapetu s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$
- $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ je okomit na $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$
- Zaključak: $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ leži u ravnini razapetoj s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.
- Dakle, $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c}$ se može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.
- Vrijedi:

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\, \overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right) \overrightarrow{a}$$

Budući je

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \overset{V2}{=} -\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \vec{a} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)\vec{c},$$

Svojstva vektorsko-vektorskog produkta

Budući je

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \overset{V2}{=} -\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \times \vec{a} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\, \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right) \vec{c},$$

onda je, općenito,

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

(jer vektor $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ leži u ravnini razapetoj s $\vec{c}$ i $\vec{b}$).